<u>ECUACIONES DIFERENCIALES</u>

GUIA DE EJERCICIOS NUMERO 1

ECUACIONES *DIFERENCIALES GENERAL. INTRODUCCION.*

1.- En las siguientes ecuaciones diferenciales, determine orden del diferencial si es una ecuación diferencial ordinaria o ecuación diferencia parcial.[1]

a.- $5.\frac{d^2x}{dt^2} + 2.\frac{dx}{dt} + 9x = 2\cos(3t)$ (vibraciones mecánicas…)

b.- $8.\frac{d^4y}{dx^4} = x(1-x)$ (deflexión en vigas)

c.- $\frac{dy}{dx} = \frac{y(2-3x)}{x(1+3y)}$ (competencia entre dos especies, ecología)

d.- $\frac{dx}{dt} = k(4-x)(1-x), con\ k\ cste$ (velocidad de las reacciones químicas)

e.- $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$ (aerodinámica, análisis de esfuerzos)

2.- Determine si la función dada es solución de la ecuación diferencial indicada.[2]

a.- $y = \sin(x) + x^2$, $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 + 2$

b.- $y = e^{2x} - 3e^{-x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

c.- $x = 2e^{3t} - e^{2t}$, $\frac{d^2x}{dt^2} - x.\frac{dx}{dt} + 3x = -2e^{2t}$

d.- $x = \cos(2t)$ $\frac{dx}{dt} + tx = \sin(2t)$

e.- $x = \cos(t) - 2\sin(t)$, $x'' + x = 0$

f.- $y = 3\sin(2x) + e^{-x}$ $y'' + 4y = 5e^{-x}$

[1] Estos ejercicios son referidos al estudiante para que observe el uso de las ecuaciones diferenciales en la ingeniería.
[2] Este ejercicio sirve para verificar si las soluciones que se obtiene en verdad corresponden a la ecuación diferencial.

3.- Determine si la relación dada es solución implícita de la ecuación diferencial.[3]

a.- $x^2 + y^2 = 4,\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

b.- $y - \ln y = x^2 + 1\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y-1}$

c.- $e^{xy} + y = x - 1\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x}$

4.- Determine para que valores de m la función $\emptyset(x) = x^m$ es solución dada.

a.- $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x.\frac{dy}{dx} - y = 0$

b.- $x^2.\frac{d^2y}{dx^2} - x.\frac{dy}{dx} - 5y = 0$

5.- Determine la familia de curvas ortogonales a las curvas dadas a continuación, bosqueje ambas en caso posible.

a.- $xy = c$ b.- $y = cx^2$ c.- $r = c(1 + \cos(\theta))$ [4] d.- $y = c\, e^x$

e.- $x^2 + 2y^2 = k^2$ f.- $y^2 = k\, x^3$ g.- $y = \frac{k}{x}$ h.- $y = \frac{x}{1+kx}$

6.- Halle usando coordenadas polares las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $r = \frac{c}{1-\cos(\theta)}$ con $c > 0$.[4]

7.- Sea un circuito eléctrico formado por una resistencia, condensador. Sea $R = 12\Omega$ y $C = 4\ F$. Si una batería da un voltaje de 60V y el interruptor se cierra en t=0 de modo que $Q(0) = Q_0$. *Determine*: a.- $Q(t)$ b.- Carga Q en 1 seg. c.- Valor límite cuando $t \to \infty$. [5]

---

[3] Acuérdese de la derivación implícita que se vio en Matemáticas 1. Verifique que se cumple la relación.

[4] Las coordenadas polares establece que una vez determinada la ecuación diferencial de las curvas. La pendiente de la familia ortogonal a estas será $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{F(r,\theta)}$, donde $F(r,\theta)$ es la EDO.

[5] No crea que este ejercicio esta fuera de lugar, vera al final de Física 3 en los circuitos RC RL y RLC(Física 4) que se requiere de una ecuación diferencial lineal para resolver el problema planteado. Recuerde que $i = \frac{dq}{dt}$ en presencia de un condensador.

ECUACIONES LINEALES.[6]

8.- Determine la solución general de la ecuación.

a.- $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$ b.- $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 2x + 1$

c.- $\frac{dy}{dx} = x^2e^{-4x} - 4y$ d.- $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^{-3}$

e.- $\frac{dr}{d\theta} + r\tan(\theta) = \sec(\theta)$ f.- $(t + y + 1)dt - dy = 0$

g.- $y\frac{dx}{dy} + 2x = 5y^3$ h.- $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + xy = x$

i.- $x\frac{dy}{dx} + 3y + 2x^2 = x^3 + 4x$ j.- $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} = x^2 + 2x - 1 - 4xy$

9.- Resuelva el problema de valor inicial.

a.- $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = xe^x$ $y(1) = e - 1$

b.- $\frac{dy}{dx} + 4y - e^{-x} = 0$ $y(0) = \frac{4}{3}$

c.- $\sin(x)\frac{dy}{dx} + ycos(x) = x\sin(x)$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

d.- $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} + 2 = 3x$ $y(1) = 1$

e.- $x^3\frac{dy}{dx} + 3x^2y = x$ $y(2) = 0$

f.- $\cos(x)\frac{dy}{dx} + y\sin(x) = 2x\cos^2(x)$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{15\sqrt{2}\pi^2}{32}$

[6] Las ecuaciones lineales se resuelve de la siguiente forma: Primero ordene de la ecuación hasta obtener la siguiente forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = G(x)$ por lo tanto determine el factor integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ y después resuelva $\mu(x).y = \int \mu(x).g(x)dx + C$

ECUACIONES DE BERNOULLI.[7]

10.- Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

a.- $\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}y^3$ b.- $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2y^2$ c.- $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} - x^2y^2$

d.- $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x-2} = 5(x-2)y^{\frac{1}{2}}$ e.- $\frac{dy}{dx} + y^3x + \frac{y}{x} = 0$ f.- $\frac{dy}{dx} + y = e^x y^{-2}$

g.- $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2}$ h.- $\frac{dy}{dx} + y^3x + y = 0$

VARIABLE SEPARABLES.[8]

11.- Resuelva la ecuación dada.

a.- $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-1}{y^2}$ b.- $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy^3}$

c.- $\frac{dy}{dx} = 3x^2y$ d.- $\frac{dy}{dx} = y(2+\sin(x))$

e.- $\frac{dy}{dx} = 3x^2(1+y^2)$ f.- $\frac{dy}{dx} + y^2 = y$

g.- $x.\frac{dv}{dx} = \frac{1-4v^2}{3v}$ h.- $y\sin(x)\, e^{\cos(x)}dx + y^{-1}dy = 0$

i.- $(x+xy^2)dx + e^{x^2}y\, dy = 0$

[7] La ecuación de Bernoulli establece la siguiente condición sea la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + P(x)y = G(x)y^n$ se realiza un cambio de variable conveniente y es $w = y^{1-n}$ de manera que queda la ecuación de la forma $\frac{dw}{dx} + (1+n)P(x)w = (1-n)G(x)$ EDL en cual ya se estudio como obtener las soluciones.

[8] Las ecuaciones diferenciales de variables separables, son sencillas de resolver, separe en una parte de la igualdad los términos de una variable y en el otro lado los otros términos de la otra variable. OJO siempre se puede hacer ya que son VARIABLES SEPARABLES. Del resto solo falta integrar.

12.- Resolver el problema con valor inicial.

a.- $x^2dx + 2y\,dy = 0 \qquad y(0) = 2$

b.- $\frac{dy}{dx} = 8x^3e^{-2y} \qquad y(1) = 0$

c.- $\frac{dy}{dx} = y\sin(x) \qquad y(\pi) = -3$

d.- $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2y+1} \qquad y(0) = -1$

e.- $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y+1}\cos(x) \qquad y(\pi) = 0$

f.- $y' = x^3(1-y) \qquad y(0) = 3$

g.- $\frac{dy}{dx} = (1+y^2)\tan(x) \qquad y(0) = \sqrt{3}$

h.- $\frac{dy}{dx} = 2x\cos^2 y \qquad y(0) = \pi/4$

i.- $\frac{dy}{dx} = x^2\,(1+y) \qquad y(0) = 3$

j.- $\sqrt{y}\,dx\ + (1+x)dy = 0 \qquad y(0) = 1$

ECUACIONES HOMOGENEAS.[9]

13.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales. Demuestre la homogeneidad de la ecuación y aplica los procedimientos a seguir.

a.- $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$

b.- $(xy + y^2)dx - x^2dy = 0$

c.- $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0$

d.- $(3x^2 - y^2)dx + (xy - x^3y^{-1})dy = 0$

e.- $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}{xy}$

f.- $\frac{dy}{dx} = \frac{x\sec\left(\frac{y}{x}\right)+y}{x}$

g.- $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y^2}{3xy}$

h.- $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y(\ln(y)-\ln(x)+1)}{x}\right)$

[9] Las ecuaciones Homogéneas cumple con la condición de $F(kx,ky) = F(x,y)$ debe verificar esta condición para luego aplicar el razonamiento que se atribuye a estas ecuaciones.

COCIENTES LINEALES.

14.- Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

a- $(-3x + y - 1)dx + (x + y + 3)dy = 0$

b.- $(x + y - 1)dx + (y - x - 5)dy = 0$

c.- $(2x + y + 4)dx + (x - 2y - 2)dy = 0$

d.- $(2x + y)dx + (4x + y - 3)dy = 0$

REVISION.

15.- Resolver las ecuaciones diferenciales.

a.- $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y}}{y-1}$ b.- $x^3y^2dx + x^4y^{-6}dy = 0$

c.- $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2 \sin(2x)$ d.- $\frac{dy}{dx} = 2 - \sqrt{2x - y + 3}$

e.- $\frac{dy}{dx} + 2y = y^2$ f.- $(y - x)dx + (x + y)dy = 0$

g.- $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^{-1}y^{-1}$ $y(1) = 3$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

TEMA: EDO. INTRODUCCION.

PREGUNTA 1

a.- 2 orden, E. Diferencial.

b.- 4 orden, E. Diferencial.

c.- 1 orden, E. Diferencial.

d.- 1 orden, E. Diferencial.

e.- 2 orden, E. Diferencial.

PREGUNTA 2

a.- SI b.- SI c.- NO d.- NO

e.- SI f.- SI

PREGUNTA 3

a.- NO b.- SI c.- SI

PREGUNTA 4

a.- ± 1

b.- $\pm\sqrt{6}$

PREGUNTA 5

a.- $x^2 - y^2 = C$

b.- $x^2 + 2y^2 = C^2$

c.- $r = C(1 - \cos(\theta))$

d.- $y^2 = -2x + C$

e.- $y = Cx^2$

g.- $x^2 - y^2 = C$

PREGUNTA 6

Solución: $r = \frac{C}{1+\cos(\theta)}$

PREGUNTA 7

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

TEMA: Ecuaciones Diferenciales Lineal.

PREGUNTA 8

a.- $y = \frac{e^{3x}}{2} + Ce^x$

c.- $y = \frac{x^3 e^{-4x}}{3} + Ce^{-4x}$

e.- $r = \sin(\theta) + C\cos(\theta)$

f.- $y = -t - 2 + ce^t$

g.- $x = y^3 + c\,y^{-2}$

h.- $y = 1 + C(x^2 + 1)^{-1/2}$

i.- $y = \frac{x^3}{6} - \frac{2x^2}{5} + x + C\,x^{-3}$

PREGUNTA 9

a.- $y = xe^x - x$

c.- $y = 1 - x\cot(x) + \csc(x)$

e.- $y = \frac{x^{-1}}{2} - 2x^{-3}$

f.- $y = \cos(x)\,(x^2 - \pi^2)$

TEMA: Ecuaciones de Bernoulli.

PREGUNTA 10

a.- $y^{-2} = Ce^{-2x} - \frac{e^{2x}}{2}$ o $y \equiv 0$

b.- $y = \frac{2}{Cx - x^3}$ o $y \equiv 0$

c.- $y = \frac{5x^2}{x^5 + C}$ o $y \equiv 0$

e.- $y^{-2} = 2x^2 \ln|x| + Cx^2$ o $y \equiv 0$

g.- $y = \frac{x^2}{C - x}$ o $y \equiv 0$

TEMA: Variable Separables.

PREGUNTA 11

a.- $y = (x^3 - 3x + C)^{1/3}$

b.- $y^4 = 4\ln|x| + C$

c.- $y = Ce^{x^3}$

d.- $y = Ce^{2x - \cos(x)}$

e.- $y = \tan(x^3 + C)$

f.- $y = \frac{Ce^x}{1 + Ce^x}$

g.- $4v^2 = 1 + Cx^{-8/3}$

h.- $y = \frac{1}{C - e^{\cos(x)}}$

PREGUNTA 12

a.- $y = \sqrt{4 - \frac{x^3}{3}}$

b.- $y = \ln\sqrt{4x^4 - 3}$

c.- $y = -3e^{-1-\cos(x)}$

d.- $y^2 + y = x^3 + 2x^2 + 2x$

e.- $y = \sin^2(x) + 2\sin(x)$

f.- $y = 1 + 2e^{-\frac{x^4}{4}}$

g.- $y = \tan\left(\frac{\pi}{3} - ln(\cos(x))\right)$

h.- $y = \arctan(x^2 + 1)$

i.- $y = 4e^{\frac{x^3}{3}} - 1$

j.- $y = \left(1 - \ln\left(\sqrt{1 + x}\right)\right)^2$

TEMA. Ecuaciones Homogéneas.

PREGUNTA 13

a.- $x^3 + 3xy^2 = C$

b.- $y = \frac{-x}{\ln|x| + C}$ ó $x \equiv 0$ ó $y \equiv 0$

c.- $y = \frac{x}{\ln|x| + c}$ o $y \equiv C$

d.-$\ln(y) - \frac{y^2}{2x^2} = 3\ln(x) + C$

e.- $\sqrt{1 + y^2/x^2} = ln|x| + C$

g.- $(x^2 - 4y^2)^3 x^2 = C$ **h.-** $y = xe^{Cx}$

TEMA: REVISION.

PREGUNTA 15

a.- $e^x + ye^{-y} = C$

b.- $y = (7\ln|x| + c)^{-1/7}$

c.- $y = -\frac{x^2}{2}\cos(2x) + \left(\frac{x}{4}\right)\sin(2x) + Cx$

d.- $y = 2x + 3 - \frac{(x+c)^2}{4}$

e.- $y = \frac{2}{1 \pm ce^{2x}}$ ó $y \equiv 0$

f.- $y^2 + 2xy - x^2 = C$

g.- $y = \sqrt{\frac{19x^4 - 1}{2}}$

PUNTOS FINALES.

1.- Aprenda de memoria el algoritmo para resolver ecuaciones diferenciales lineales. Como también las ecuaciones de Bernoulli.

2.- Debe recordar cómo integrar, ya estudiado en matemáticas 2, así como la integración por partes, y las integrales trigonométricas.

3.- En las ecuaciones homogéneas, verifique que es una ecuación homogénea al resolver $f(kx,ky) = f(x,y)$. De manera que proceda a realizar los cambios de variable.

4.- En las ecuaciones de Variables Separables, pase las variables (y) a un lado de la igualdad donde está presente (dy) de igual forma con la variable (x) e integre para obtener la solución al problema.

SIRVASE DE AYUDA PARA PRACTICAR "ECUACIONES DIFERENCIALES" PRIMERA PARTE MATEMATICAS 4

CUALQUIER ERROR TIPOGRAFICO O DE RESULTADOS FAVOR AVISAR A magt_123@hotmail.com PARA SU CORRECCION. MENCIONE NUMERO DE PAG, NUMERO DE EJERCICIO, QUE DICE Y QUE DEBERIA DECIR.

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA.

R. Kent Nagle, Edward B. Saff, A. David Snider "FUNDAMENTALS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS" Fourth Edition, Pearson Addison Wesley, 2004

REVISADA: **JULIO 2010**

Elaborado por: Miguel Guzmán